Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy

KATALOG POŽADAVKŮ K MATURITNÍ ZKOUŠCE

MATEMATIKA

VYŠŠÍ ÚROVEŇ OBTÍŽNOSTI

Aktualizace katalogu schváleného Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR
dne 4. 10. 2005 pod č. j. 26 674/05-2/20

Zpracovalo: CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ

Schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR dne … 2008 pod č. j. …
s účinností od školního roku 2009/2010

Obsah

Úvod

Účel a obsah katalogu

Katalogy požadavků k maturitní zkoušce poskytují všem jejich uživatelům informace o požadavcích kladených na žáky vzdělávacích programů v oborech středního vzdělání s maturitní zkouškou.

Maturitní zkouška z matematiky má charakter didaktického testu a je připravována ve dvou úrovních obtížnosti. Rozdíly mezi úrovněmi obtížnosti jsou vymezeny rozsahem a hloubkou ověřovaných znalostí a dovedností a odlišnostmi v typu použitých testových úloh s otevřenou odpovědí. Tento katalog vymezuje požadavky k maturitní zkoušce vyšší úrovně obtížnosti. Zkouška z matematiky ve vyšší úrovni obtížnosti má mimo jiné též splňovat vstupní požadavky vysokých škol.

Pedagogické dokumenty ke katalogu a k maturitní zkoušce

Základem pro zpracování katalogu jsou stávající platné pedagogické dokumenty:
Učební dokumenty pro gymnázia. Praha, Fortuna 1999.
Standard vzdělávání ve čtyřletém gymnáziu. Praha, Fortuna 1999.
Učební osnovy pro SOŠ a SOU, č. 21307/2000 ze 16.6.2000, a dále
učební osnovy matematiky pro technická, přírodovědná a ekonomická lycea.

Zpracovatelé katalogu využili jako podpůrné prameny také publikované standardy a didaktické materiály.[1]

Při zpracování katalogu byla zohledněna skutečnost, že na některých středních školách jsou již ověřovány rámcové vzdělávací programy.

---

1 (1) FUCHS, E., BINTEROVÁ, H. a kol. Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborná učiliště. Praha: Prometheus, 2003, ISBN 80-7196-294-5

(2) FUCHS, E., KUBÁT, J. a kol.. Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80 7196 095 0.

(3) FUCHS, E., PROCHÁZKA, F. a kol. Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80 7196 097 7.

(4) Měření vědomostí a dovedností – nová koncepce hodnocení žáků. Praha: ÚIV, 1999. 78 s. ISBN 80 211 0333 7. Přel. z: Measuring Student Knowledge and Skills. Paris: OECD, 1999. 82 pp.

Požadavky k maturitní zkoušce

Očekávané znalosti a dovednosti pro zkoušku matematika ve vyšší úrovni obtížnosti jsou v prvé části uvedeny pěti hlavními kategoriemi kompetencí, které by během výuky matematiky na střední škole měly být zohledňovány.

Osvojení matematických pojmů a dovedností

Žák dovede:

- Užívat správně matematické pojmy (definovat pojmy a určit jejich obsah, charakterizovat pojem různými způsoby, třídit pojmy a nalézat vztahy mezi nimi, zobecňovat pojmy a vztahy mezi nimi)
- Numericky počítat a užívat proměnnou (provádět základní početní operace, odhadnout výsledek výpočtu, využít efektivní způsoby výpočtu, upravit výrazy s čísly a proměnnými, stanovit definiční obor výrazu, na základě reálné situace sestavit výraz s proměnnými)
- Pracovat s rovinnými a prostorovými útvary (rozpoznat a pojmenovat geometrické útvary, využívat geometrickou představivost při analýze rovinných a prostorových vztahů, měřit a odhadovat výsledek měření, řešit početně geometrickou úlohu, řešit konstrukčně geometrickou úlohu)
- Matematicky argumentovat (rozlišit různé typy tvrzení (definice, věta), rozumět logické stavbě matematické věty, dokázat jednoduchou matematickou větu, vytvořit, ověřit, zdůvodnit nebo vyvrátit hypotézu)

Matematické modelování

Žák dovede:

- Matematizovat reálné situace (odhalit kvantitativní nebo prostorové vztahy a zákonitosti, vytvořit matematický model reálné situace)
- Pracovat s matematickým modelem
- Ověřit vytvořený model z hlediska reálné situace (vyjádřit výsledek řešení modelu v kontextu reálné situace, vyhodnotit výsledek modelované situace)
- Kombinovat různé modely téže situace

Vymezení a řešení problému

Žák dovede:

- Vymezit problém
- Analyzovat problém
- Zvolit vhodnou metodu řešení problému (popsat problém vzorcem, užít známý algoritmus, vytvořit algoritmus řešení)
- Vyřešit problém
- Diskutovat o výsledcích
- Aplikovat osvojené metody řešení problémů v jiných tématech a oblastech

Komunikace

Žák dovede:

- Číst s porozuměním matematický text
- Vyhodnotit informace kvantitativního i kvalitativního charakteru obsažené v grafech, diagramech, tabulkách atd.
- Přesně se vyjádřit (užívat jazyk matematiky včetně symboliky a terminologie, zdůvodnit matematické tvrzení, obhájit vlastní řešení problému, prezentovat výsledky řešení úlohy (geometrické konstrukce) na dobré grafické úrovni)

- Prezentovat získané informace a výsledky (zpracovat získané údaje formou grafů, diagramů, tabulek atd., použít různé formy znázornění matematických situací)

Užití pomůcek

Žák dovede:

- Využít informační zdroje (odborná literatura, internet atd.)
- Efektivně řešit problémy pomocí kalkulátoru a PC
- Použít kalkulátor a PC k prezentaci řešení problémů
- Použít tradiční prostředky grafického vyjadřování

Druhá část požadavků obsahuje již konkrétní dovednosti a znalosti z jednotlivých tematických celků tak, jak byly týmem spolupracovníků v zastoupení všech typů středních škol a odborných ústavů určeny.

1. Číselné obory

Žák dovede:

1.1 Přirozená čísla

- provádět aritmetické operace s přirozenými čísly
- rozlišit prvočíslo a číslo složené, rozložit přirozené číslo na prvočinitele
- užít pojem dělitelnosti přirozených čísel a znaky dělitelnosti
- určit největší společný dělitel a nejmenší společný násobek přirozených čísel

1.2 Celá čísla

- provádět aritmetické operace s celými čísly
- užít pojem opačné číslo

1.3 Racionální čísla

- pracovat s různými tvary zápisu racionálního čísla a jejich převody
- provádět operace se zlomky
- provádět operace s desetinnými čísly včetně zaokrouhlování, určit řád čísla
- řešit praktické úlohy na procenta a užitím trojčlenky
- znázornit racionální číslo na číselné ose

1.4 Reálná čísla

- zařadit číslo do příslušného číselného oboru
- provádět aritmetické operace v číselných oborech
- užít pojmy opačné číslo a převrácené číslo
- znázornit reálné číslo nebo jeho aproximaci na číselné ose
- určit absolutní hodnotu reálného čísla a chápat její geometrický význam
- zapisovat a znázorňovat intervaly, jejich průnik, sjednocení a doplněk
- užít druhé a třetí mocniny a odmocniny
- provádět operace s mocninami s celočíselným exponentem
- užít mocninu s racionálním exponentem a ovládat početní výkony s mocninami a odmocninami

1.5 Komplexní čísla

- užít Gaussovu rovinu k zobrazení komplexních čísel
- vyjádřit komplexní číslo v algebraickém i goniometrickém tvaru
- vypočítat absolutní hodnotu a argument komplexního čísla a chápat jejich geometrický význam
- sčítat, odčítat, násobit a dělit komplexní čísla v algebraickém tvaru
- násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru užitím Moivreovy věty

2. Algebraické výrazy

Žák dovede:

2.1 Algebraický výraz

- určit hodnotu výrazu
- určit nulový bod výrazu

2.2 Mnohočleny

- provádět početní operace s mnohočleny
- rozložit mnohočlen na součin užitím vzorců a vytýkáním

2.3 Lomené výrazy

- provádět operace s lomenými výrazy
- stanovit definiční obor lomeného výrazu

2.4 Výrazy s mocninami a odmocninami

- provádět operace s výrazy obsahujícími mocniny a odmocniny

3. Rovnice a nerovnice

Žák dovede:

3.1 Lineární rovnice a jejich soustavy, rovnice s neznámou ve jmenovateli

- stanovit definiční obor rovnice
- řešit lineární rovnice o jedné neznámé a rovnice s neznámou ve jmenovateli
- řešit rovnice obsahující výrazy s neznámou v absolutní hodnotě
- vyjádřit neznámou ze vzorce
- užít rovnice při řešení slovní úlohy
- řešit rovnice s parametrem
- řešit početně i graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých
- řešit soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

3.2 Kvadratické rovnice

- řešit neúplné i úplné kvadratické rovnice
- užít vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice
- užít kvadratickou rovnici při řešení slovní úlohy
- řešit kvadratické rovnice s parametrem

- řešit kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v oboru komplexních čísel
- řešit soustavy lineární a kvadratické rovnice o dvou neznámých

3.3 Rovnice s neznámou pod odmocninou

- řešit rovnice s neznámou pod odmocninou, při řešení rovnic rozlišit ekvivalentní a neekvivalentní úpravy

3.4 Lineární a kvadratické nerovnice a jejich soustavy

- řešit lineární nerovnice s jednou neznámou a jejich soustavy
- řešit rovnice a nerovnice v součinovém a podílovém tvaru
- řešit nerovnice obsahující lineární výrazy s neznámou v absolutní hodnotě
- řešit početně i graficky kvadratické nerovnice

4. Funkce

Žák dovede:

4.1 Základní poznatky o funkcích

- užít různá zadání funkce v množině reálných čísel a užít s porozuměním pojmy: definiční obor, obor hodnot, hodnota funkce v bodě, graf funkce
- určit průsečíky grafu funkce s osami soustavy souřadnic, sestrojit graf funkce, přiřadit předpis funkce $y = f(x)$ ke grafu funkce
- rozhodnout, zda je funkce sudá nebo lichá, prostá, omezená, periodická, stanovit definiční obory a obory hodnot funkcí, intervaly monotonie a body, v nichž funkce nabývá lokální a globální extrémy
- sestrojit z grafu funkce $y = f(x)$ grafy funkcí $y = f(x-m) + n$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$
- určit funkci inverzní k dané funkci (načrtnout její graf), užít poznatky o složené funkci
- modelovat reálné závislosti pomocí funkcí

4.2 Lineární funkce

- užít pojem a vlastnosti přímé úměrnosti
- určit lineární funkci, sestrojit její graf,
- využívat geometrický význam parametrů a, b v předpisu funkce $y = ax + b$
- určit předpis lineární funkce z daných bodů nebo grafu funkce
- sestrojit graf lineární funkce s absolutními hodnotami a určit vlastnosti funkce
- řešit reálné problémy pomocí lineární funkce

4.3 Kvadratické funkce

- určit kvadratickou funkci, vysvětlit význam parametrů v předpisu kvadratické funkce, upravit předpis funkce, sestrojit graf
- stanovit definiční obor a obor hodnot funkce, najít bod, v němž nabývá funkce extrému, určit intervaly monotonie
- sestrojit graf kvadratické funkce s absolutní hodnotou a určit její vlastnosti
- řešit reálné problémy pomocí kvadratické funkce

4.4 Mocninné funkce

- určit mocninnou funkci s celočíselným exponentem, funkce druhá a třetí odmocnina, sestrojit grafy těchto funkcí
- stanovit definiční obor a obor hodnot, určit intervaly monotonie

4.5 Lineární lomená funkce

- užít pojem a vlastností nepřímé úměrnosti
- určit lineární lomenou funkci, upravit předpis funkce, určit asymptoty, načrtnout graf lineární lomené funkce posunutím grafu nepřímé úměrnosti
- stanovit definiční obor a obor hodnot lineární lomené funkce, určit intervaly monotonie
- sestrojit graf lineární lomené funkce s absolutní hodnotou a určit její vlastnosti
- řešit reálné problémy pomocí lineární lomené funkce

4.6 Exponenciální a logaritmické funkce, rovnice a nerovnice

- určit exponenciální funkci a sestrojit její graf
- užívat s porozuměním pojmu inverzní funkce pro definování logaritmické funkce, určit logaritmickou funkci a sestrojit její graf
- stanovit definiční obor a obor hodnot u obou funkcí, určit typ monotonie v závislosti na hodnotě základu,

- řešit exponenciální a logaritmické rovnice a jednoduché nerovnice, užít logaritmu a jeho vlastností
- aplikovat poznatky o exponenciálních a logaritmických funkcích při řešení reálných problémů

4.7 Goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

- užít pojmu orientovaný úhel a jeho hodnoty v míře stupňové a obloukové
- definovat goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku
- definovat goniometrické funkce v oboru reálných čísel, užít jednotkové kružnice
- načrtnout grafy goniometrických funkcí $y=f(x)$ a grafy funkcí $y=a\cdot f(bx+c)+d$, určit jejich definiční obor, obor hodnot, užít vlastností
- užít vztahy mezi goniometrickými funkcemi
- řešit goniometrické rovnice a jednoduché nerovnice
- aplikovat poznatky o goniometrických funkcích při řešení reálných problémů

5. Posloupnosti a řady, finanční matematika

Žák dovede:

5.1 Základní poznatky o posloupnostech

- aplikovat znalosti o funkcích při úvahách a řešení úloh o posloupnostech
- určit posloupnost vzorcem pro n-tý člen, rekurentně, graficky

5.2 Aritmetická posloupnost

- určit aritmetickou posloupnost a používat pojem diference
- užít základní vzorce pro aritmetickou posloupnost

5.3 Geometrická posloupnost

- určit geometrickou posloupnost a používat pojem kvocient
- užít základní vzorce pro geometrickou posloupnost

5.4 Limita posloupnosti a nekonečná geometrická řada

- s porozuměním užívat pojmy vlastní a nevlastní limita posloupnosti, konvergentní a divergentní posloupnost
- využít věty o limitách posloupnosti k výpočtu limity posloupnosti
- určit podmínky konvergence nekonečné geometrické řady a vypočítat její součet

5.5 Využití posloupností pro řešení úloh z praxe

- využít poznatků o posloupnostech v reálných situacích, zejména v úlohách finanční matematiky a dalších praktických problémech

6. Planimetrie

Žák dovede:

6.1 Planimetrické pojmy a poznatky

- správně užít pojmy bod, přímka, polopřímka, rovina, polorovina, úsečka, úhly – vedlejší, vrcholové, střídavé, souhlasné, středové a obvodové, znázornit objekty
- užít s porozuměním polohové a metrické vztahy mezi geometrickými útvary v rovině (rovnoběžnost, kolmost a odchylka přímek, délka úsečky a velikost úhlu, vzdálenosti bodů a přímek)
- rozlišit konvexní a nekonvexní útvary, popsat a správně užívat jejich vlastnosti
- při řešení úloh využívat množiny všech bodů dané vlastnosti

6.2 Trojúhelníky

- pojmenovat základní objekty v trojúhelníku, správně užít jejich vlastností, pojmů užívat s porozuměním (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, výšky, těžnice, střední příčky, kružnice opsaná a vepsaná)
- při řešení úloh argumentovat s využitím poznatků vět o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- aplikovat poznatky o trojúhelnících (obvod, obsah, výška, Pythagorova a Euklidovy věty, poznatky o těžnicích a těžišti) v úlohách početní geometrie
- aplikovat poznatky o trojúhelnících v úlohách konstrukční geometrie
- řešit praktické úlohy užitím trigonometrie pravoúhlého a obecného trojúhelníku

6.3 Mnohoúhelníky

- rozlišit základní druhy čtyřúhelníků, popsat a správně užít jejich vlastnosti (různoběžníky, rovnoběžníky, lichoběžníky), pravidelné mnohoúhelníky
- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty ve čtyřúhelníku (strany, vnitřní a vnější úhly, osy stran a úhlů, kružnice opsaná a vepsaná, úhlopříčky, výšky), popsat a užít vlastností konvexních mnohoúhelníků
- užít poznatky o čtyřúhelníku (obvod, obsah, vlastnosti úhlopříček a kružnice opsaná nebo vepsaná) a mnohoúhelníku v úlohách početní geometrie
- využít poznatky o mnohoúhelnících v úlohách konstrukční geometrie

6.4 Kružnice a kruh

- pojmenovat, znázornit a správně užít základní objekty v kružnici a kruhu, popsat a užít jejich vlastnosti (tětiva, kružnicový oblouk, kruhová výseč a úseč, mezikruží)
- užít polohové vztahy mezi body, přímkami a kružnicemi
- aplikovat metrické poznatky o kružnicích a kruzích (obvod, obsah, velikost obvodového a středového úhlu) v úlohách početní geometrie
- aplikovat poznatky o kružnici a kruhu v úlohách konstrukční geometrie

6.5 Geometrická zobrazení

- popsat a určit shodná zobrazení (souměrnosti, posunutí, otočení) a užít jejich vlastnosti
- popsat a určit stejnolehlost nebo podobnost útvarů a užít jejich vlastnosti
- aplikovat poznatky o shodnosti a podobnosti v úlohách konstrukční geometrie

7. Stereometrie

Žák dovede:

7.1 Polohové vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzájemnou polohu bodů, přímek, přímky a roviny, rovin
- rozhodnout o kolmosti nebo rovnoběžnosti přímek a rovin
- zobrazit jednoduchá tělesa ve volném rovnoběžném promítání
- konstruovat rovinné řezy hranolu a jehlanu

7.2 Metrické vlastnosti útvarů v prostoru

- určit vzdálenost bodu od přímky a roviny, odchylku dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin

7.3 Tělesa

- charakterizovat jednotlivá tělesa, vypočítat jejich objem a povrch (krychle, kvádr, hranol, jehlan, rotační válec, rotační kužel, komolý jehlan a kužel, koule a její části)
- využít poznatků o tělesech v praktických úlohách

8. Analytická geometrie

Žák dovede:

8.1 Souřadnice bodu a vektoru v rovině i prostoru

- určit vzdálenost dvou bodů a souřadnice středu úsečky
- užít pojmy: vektor a jeho umístění, souřadnice vektoru a velikost vektoru
- provádět operace s vektory (součet vektorů, násobek vektoru reálným číslem, skalární a vektorový součin vektorů)
- určit velikost úhlu dvou vektorů

8.2 Přímka a rovina

- užít parametrické vyjádření přímky v rovině a prostoru, obecnou rovnici přímky a směrnicový tvar rovnice přímky v rovině
- užít parametrické vyjádření roviny a obecnou rovnici roviny
- určit a aplikovat v úlohách polohové a metrické vztahy bodů, přímek a rovin

8.3 Kuželosečky

- charakterizovat jednotlivé druhy kuželoseček, použít jejich vlastnosti a analytické vyjádření.
- určit vzájemnou polohu přímky a kuželosečky

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Žák dovede:

9.1 Kombinatorika

- rozpoznat kombinatorické skupiny (variace s opakováním, variace, permutace, a kombinace bez opakování), určit jejich počty a užít v reálných situacích
- počítat s faktoriály a kombinačními čísly
- užít binomickou větu při řešení úloh

9.2 Pravděpodobnost

- použít pojmy náhodný jev, jistý jev, nemožný jev, opačný jev, nezávislost jevů, sjednocení a průnik jevů
- určit pravděpodobnost náhodného jevu, vypočítat pravděpodobnost sjednocení nebo průniku dvou jevů

9.3 Statistika

- vysvětlit a použít pojmy statistický soubor, rozsah souboru, statistická jednotka, statistický znak, četnost a relativní četnost
- vypočítat četnost a relativní četnost hodnoty znaku sestavit tabulku četností, graficky znázornit rozdělení četností
- určit charakteristiky polohy a variability (průměry, modus, medián, rozptyl, směrodatná odchylka)
- vyhledat a vyhodnotit statistická data v grafech a tabulkách

Základní specifikace zkoušky z matematiky

Maturitní zkouška matematika ve vyšší úrovni obtížnosti bude ověřovat matematické znalosti a dovednosti žáků formou didaktického testu, který bude tvořen úlohami uzavřenými, otevřenými se stručnou odpovědí a několika otevřenými úlohami s širokou odpovědí. V uzavřených úlohách je vždy právě jedna alternativa v nabídce správná. V jeho průběhu budou mít žáci k dispozici Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy, budou moci používat kalkulátor bez grafického režimu a rýsovací potřeby. Následující tabulka uvádí přibližné procentuální zastoupení jednotlivých témat v testu.

Tematické okruhy	%
1. Číselné množiny	5–10
2. Algebraické výrazy	10–20
3. Rovnice a nerovnice	15–25
4. Funkce	10–20
5. Posloupnosti a řady, finanční matematika	5–10
6. Planimetrie	10–15
7. Stereometrie	5–15
8. Analytická geometrie	10–20
9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika	5–10

Příklady testových úloh

Testové úlohy jsou uvedeny jen jako samostatné ukázky, jejich zastoupení necharakterizuje strukturu testu. Soubor ukázek proto nelze považovat za sestavený test.

V ukázkách uzavřených úloh jsou autorská řešení označena tučnou sazbou písmena, uvádějícího danou odpověď. U otevřených úloh je správné řešení připojeno pod úlohou.

1. Číselné množiny

Úloha 1
Na divadelní představení byly zakoupeny dva druhy vstupenek. Jistý počet vstupenek prvního druhu za 48 Kč a o pět vstupenek po 68 Kč více. Za vstupenky bylo celkem zaplaceno 1 500 Kč. Kolik vstupenek každého druhu bylo zakoupeno?

Řešení: 10 a 15.

Úloha 2
Výnosy z vkladní knížky jsou sníženy vždy o 15% daň. Vklad ve výši 55 000 Kč vynesl za rok čistý úrok 3 740 Kč. Jaká byla roční úroková míra? Výsledek zaokrouhlete na desetiny procenta.

Řešení: 8,0 %

Úloha 3

Vypočítejte $\dfrac{\left(15^{\frac{1}{3}}.27^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}.9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3\sqrt[4]{27}}}$ a výsledek zapište pomocí mocnin s racionálním exponentem.

Řešení: $3^{-\frac{19}{4}}$

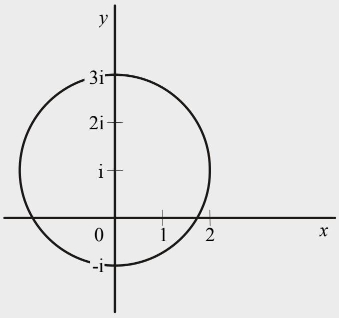
Úloha 4
Kolejnice délky 25 m se při zvýšení teploty vzduchu o 20 °C prodlouží o 6 mm. Nejnižší teplota (−15) °C byla naměřena 12. února a nejvyšší teplota 35 °C 18. července téhož roku. Jaký byl největší rozdíl v délkách této kolejnice v průběhu roku, jestliže délka kolejnic se mění v závislosti na teplotě vzduchu rovnoměrně?

A) 6 mm
B) 12 mm
C) 15 mm
D) 18 mm

Úloha 5

V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla z, pro která platí: $|z-i|=2$.

Řešení:



Úloha 6

Výraz $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$ je roven:

A) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

B) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

C) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

D) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. Algebraické výrazy

Úloha 1

Rovnost $\left(x^2+1\right)\left(x-a\right)+2=x^3+3x^2+x+b$ platí pro všechna $x\in R$.
Určete hodnoty parametrů *a, b*.

Řešení: $a=-3$, $b=5$

Úloha 2

Upravte výraz $\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-x-2}$ a určete jeho definiční obor.

Řešení: $x+2$; $R\setminus\{-1;2\}$

Úloha 3

Výraz $\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{x+y}:\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ lze pro všechna $x>0$, $y>0$ upravit na tvar:

A) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{xy}$

B) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}$

C) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

D) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$

Úloha 4

4.1 Pro libovolná dvě reálná čísla *a, b* platí $|a-b|=|b-a|$. (**ANO**–NE)

4.2 $\dfrac{2^{500}+2^{502}}{2}=5\cdot2^{499}$ (**ANO**–NE)

4.3 Pro každá dvě nezáporná čísla *a, b* platí $\sqrt{a+b}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. (ANO–**NE**)

4.4 $\binom{80}{25}-\binom{80}{35}+\binom{80}{45}-\binom{80}{55}=0$ (**ANO**–NE)

3. Rovnice a nerovnice

Úloha 1

Na cestě mezi městy A a C leží město B. Vzdálenost měst A, B je 10 km a vzdálenost měst B, C je 50 km. Z měst A a B současně vyjeli dva cyklisté směrem k městu C. Rychlost cyklisty vyjíždějícího z města A byla 25 km.h^{-1}, rychlost cyklisty vyjíždějícího z města B 20 km.h^{-1}. První dohonil druhého. Ve které vzdálenosti od města A to bylo?

A) 45 km
B) 50 km
C) 55 km
D) 60 km

Úloha 2

Řešte v R rovnici $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-1}{x-5}=4$.

Řešení: $x_1=9;\ x_2=4$

Úloha 3

Řešte v R nerovnici $x^2+4x-8<|x+2|$.

Řešení: $(-6;\ 2)$

Úloha 4

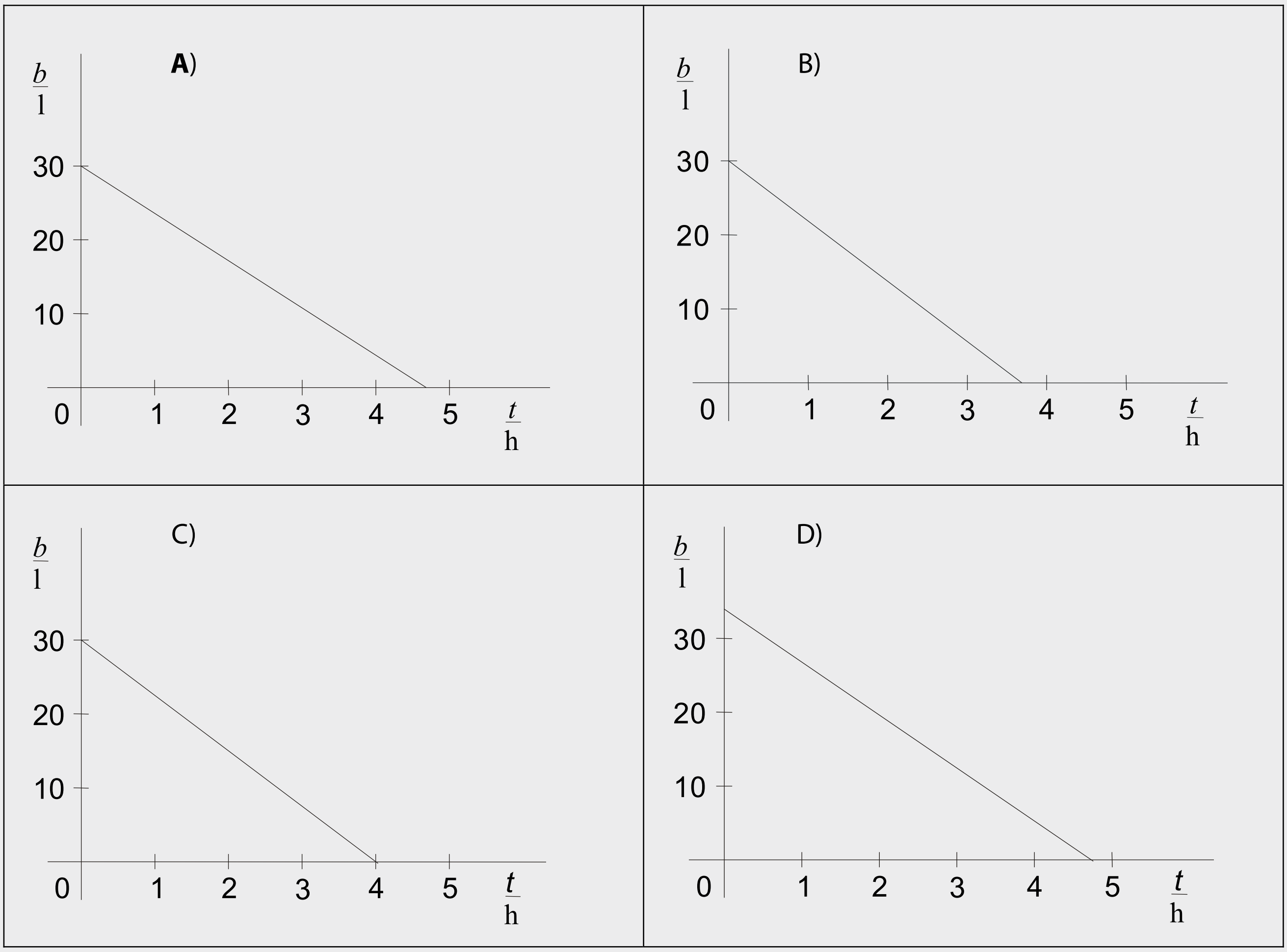
Kvadratická rovnice $x^2-2x(1+m)+3m+7=0$ s parametrem $m\in R$ má imaginární kořeny pro:

A) $m\in\langle -2,3\rangle$
B) $m\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$
C) $m\in\{-2,3\}$
D) $m\in(-2,3)$

4. Funkce

Úloha 1

Automobil má na počátku jízdy 30 litrů benzinu v nádrži. Průměrná spotřeba je 8 litrů na 100 km. Automobil jede po dálnici průměrnou rychlostí 80 km.h^{-1}. Který z grafů by mohl znázorňovat lineární funkci, která určuje závislost objemu benzinu v nádrži b (v litrech) na době jízdy auta t (v hodinách)?



Úloha 2

Teplota se měří v Celsiových nebo Fahrenheitových stupních. Teplota f ve Fahrenheitových stupních je lineární funkcí teploty c v Celsiových stupních. Přitom hodnotě 8 °C odpovídá 46,4 °F a 24 °C odpovídá 75,2 °F. Určete hodnotu ve Fahrenheitových stupních, která odpovídá 20 °C.

Řešení: 68,0 °F

Úloha 3

Závislost hmotnosti *m* radioaktivní látky na čase *t* při její radioaktivní přeměně je dána vzorcem

$m = m_0 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{T}}$, kde m_0 značí počáteční hmotnost látky v čase $t = 0$ a T je tzv. poločas přeměny (doba, za kterou se m_0 zmenší na polovinu). Poločas přeměny radionuklidu jodu ^{131}I je 8 dní. Vypočítejte hmotnost zbylého radionuklidu za 5 dní, jestliže $m_0 = 0{,}1$ g.

A) 65 mg
B) 6,5 mg
C) 0,65 mg
D) 0,065 mg

Úloha 4

Řešte následující nerovnice v daných oborech a výsledek zapište intervalem.

4.1 $3 - x \geq -3$ pro $x \in \langle -10, 10 \rangle$

4.2 $x^2 \leq x$ pro $x \in R$

4.3 $\log_3 x \geq 0$ pro $x \in R$

4.4 $\cos x < \sin x$ pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

Řešení: $x \in \langle -10, 6 \rangle$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $x \in \langle 1, \infty)$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right)$

5. Posloupnosti a řady, finanční matematika

Úloha 1
Firma zvyšovala za posledních pět let výrobu každý rok o 10 % oproti předcházejícímu roku. O kolik procent firma zvýšila výrobu za posledních pět let? Výsledek zaokrouhlete na celá procenta.

Řešení: 61 %

Úloha 2
V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ a pro všechna $n \in N$ platí $a_{n+2} = a_n + 2a_{n+1}$. Šestý člen této posloupnosti je roven:

A) 24
B) 49
C) 52
D) 58

Úloha 3
Slečna Hermína disponuje částkou 8 500 korun, proto se rozhodla navštívit velký svět financí. Zaujal ji plakát firmy „MOULA & spol.", v němž stálo:

Naše firma zhodnotí Vaše peníze! Za 100 dnů si splníte své sny!

Za jednorázovou investici v hodnotě 10 000 korun a více garantujeme 6% zisk za 100 dnů.

Dokonce i investice pod 10 000 korun Vám přinese za 100 dnů 3% zisk.

Chybí Vám peníze? Půjčíme Vám až 10 000 korun na 100 dnů!

Teprve až uplyne celých 100 dnů, zaplatíte 15% úrok z půjčené částky.

Hermína by ráda investovala 10 000 korun, a proto zvažovala možnost půjčky. Zodpovězte následující otázky za předpokladu, že firma dostojí svým slibům.

3.1 Jaký bude zisk Hermíny, pokud si žádné peníze nepůjčí a investuje jen částku 8 500 korun?
3.2 O kolik korun se zvýší její zisk, pokud si chybějící peníze od firmy půjčí a investuje 10 000 korun?
3.3 Pokud by měla Hermína o něco méně než 8 500 korun, investice s půjčkou by se jí mohla stále ještě vyplatit. Naopak pro nízké částky je výhodnější investice bez půjčky. Pro jakou částku přinášejí obě možnosti (investice částky s půjčkou i bez půjčky) stejný zisk?

Řešení: 3.1: 255 Kč, 3.2: Zisk se zvýší o 120 Kč. 3.3: Možnosti jsou stejné pro částku 7500 Kč.

Úloha 4

Výchozí text k úlohám 4.1 a 4.2
Čísla 1, 26 a 36 jsou tři členy konečné aritmetické posloupnosti. Je mezi nimi uveden první a poslední člen posloupnosti.

4.1
Určete interval, do něhož patří největší možná diference *d* takové posloupnosti.

A) $(0; 2{,}5)$

B) $\langle 2{,}5; 4)$

C) $\langle 4; 5{,}5)$

D) Do žádného z uvedených intervalů.

4.2
Kolik členů by měla aritmetická posloupnost (viz výchozí text) pro diferenci $d=0{,}25$?

A) 140
B) 141
C) 147
D) Pro danou diferenci nejsou splněny podmínky v zadání úlohy.

Úloha 5

Pro kterou hodnotu $k \in \mathrm{R}$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k\cdot n^2+4n}{(2n+1)^2}=2$?

A) 0
B) 2
C) 4
D) 8

Úloha 6

Která z uvedených řad nemá součet $\dfrac{1}{2}$?

A) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+.....$

B) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{2}{81}+....$

C) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+....$

D) $\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{3}{32}+...$

6. Planimetrie

Úloha 1

Kružnice má délku o 10 cm větší, než je obvod pravidelného šestiúhelníku do ní vepsaného. Vypočtěte obsah kruhu, jehož hranici tvoří tato kružnice.

Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

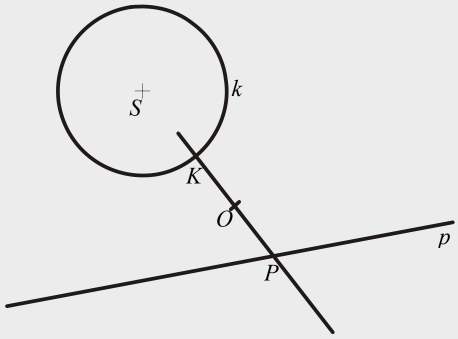
Řešení: 4 005 cm^2

Úloha 2

Je dána přímka *p*, kružnice $k(S;r)$ a bod O ($O \notin p \cup k$). Na kružnici *k* určete bod *K* a na přímce *p* bod *P* ($P \neq K$) tak, aby bod *O* byl středem úsečky *KP*.

Řešení:

Náčrtek:



Rozbor:

K je obrazem *P* ve středové souměrnosti S_0 se středem v *O*

Zápis konstrukce:

1. p'; $p' = S_0(p)$
2. K; $K \in k \cap p'$
3. $\leftrightarrow KO$
4. P; $P \in p \cap \leftrightarrow KO$

Diskuse:

a) $k \cap p' = \emptyset$ … nemá řešení

b) $k \cap p' = \{K\}$ … jedno řešení

c) $k \cap p' = \{K, K'\}$ … dvě řešení

Úloha 3

Velikosti vnitřních úhlů šestiúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Nejmenší úhel má velikost 70°. Určete velikosti zbývajících vnitřních úhlů.

Řešení: 90°, 110°, 130°, 150°, 170°

Úloha 4

V levém sloupci jsou zapsány čtyři různé množiny bodů *X* roviny ρ.

Ke každé množině zapsané v 4.1 až 4.4 přiřaďte jeden ze šesti obrázků A až F, v němž je příslušná množina zobrazena.

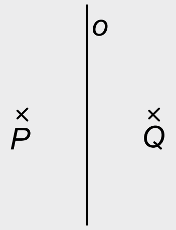
4.1 $\{X \in \rho; |\angle PXQ| = 90°\}$

4.2 $\{X \in \rho; |XP| + |XQ| = 2|PQ|\}$

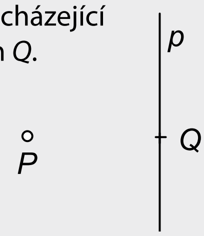
4.3 $\{X \in \rho; |PX|^2 - |QX|^2 = |PQ|^2\}$

4.4 $\{X \in \rho; |XP| - |XQ| = |PQ|\}$

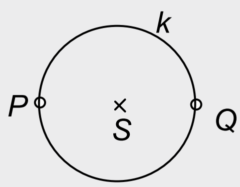
obr. A
Osa *o* úsečky *PQ*.



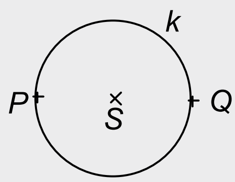
obr. B
Přímka *p* kolmá k úsečce *PQ* procházející bodem *Q*.



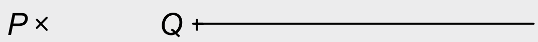
obr. C
Kružnice *k* s průměrem *PQ* kromě bodů *P* a *Q*.



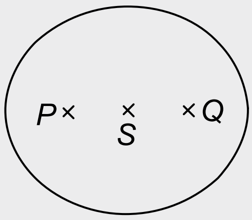
obr. D
Kružnice *k* s průměrem *PQ*.



obr. E
Polopřímka opačná k polopřímce *QP*.



obr. F
Elipsa s ohnisky *P*, *Q* a hlavní poloosou délky $|PQ|$.

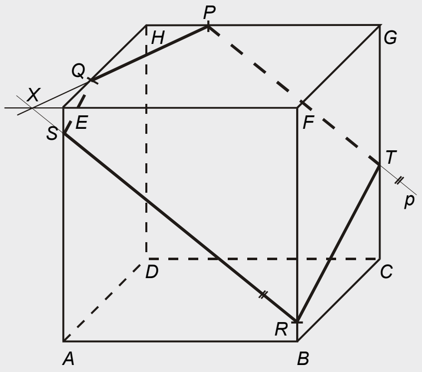


Řešení: 4.1–C, 4.2–F, 4.3–B, 4.4–E

7. Stereometrie

Úloha 1
V krychli *ABCDEFGH* , kde $|AB| = 6$ cm, je bod *P* vnitřním bodem hrany *HG*, bod *Q* vnitřním bodem hrany *EH* a bod *R* vnitřním bodem hrany *BF*. Sestrojte řez krychle rovinou *PQR*.

Řešení:



Úloha 2
Pro odstraňování ropných havárií na otevřeném moři se používají speciální hmoty, které jsou schopny svým velkým povrchem absorbovat ropu z mořské hladiny. 1 cm^2 povrchu takové hmoty je schopen absorbovat až 20 g ropy. Z krychle výchozí suroviny o hraně 1 m byla technologickým způsobem bez materiálových ztrát vyrobena směs kuliček o středním průměru 2 mm. Kuliček, které lze připravit za uvedených podmínek, je přibližně:
Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

A) 240 tisíc
B) 24 milionů
C) 120 milionů
D) 240 milionů

Úloha 3
Určete počet tělesových úhlopříček v konvexním pětibokém kolmém hranolu.

Řešení: 10

Úloha 4
Je dán pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA´B´C´D´E´F´* a dvojice rovin:
a) *ABC, D´E´F´* b) *ABB´, CC´F´* c) *BDD´, A´AE* d) *A´F´F, EDD´* e) *ACF´, A´B´D*

Určete počet dvojic rovin, které **NEJSOU** rovnoběžné.

A) právě jedna
B) právě dvě
C) právě tři
D) více než tři

Úloha 5
V kotli tvaru polokoule o vnitřním průměru 86 cm je hladina vody 5 cm pod okrajem kotle. Kolik litrů vody je v kotli?
Poznámka: Počítejte s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.

Řešení: 137,5 l

8. Analytická geometrie

Úloha 1

V rovnoběžníku $ABCD$ je dán střed souměrnosti $S[2;0]$ a vektory $\overrightarrow{AB}=(5;-1)$ a $\overrightarrow{AD}=(1;3)$.

Který z uvedených bodů je vrcholem daného rovnoběžníku?

A) $A[-3;-1]$

B) $B[5;-1]$

C) $C[5;1]$

D) $D[-1;1]$

Úloha 2

Množina vektorů c, kolmých k vektorům $\vec{a}$ = (–1; 1; 2) a $\vec{b}$ = (–2; 0; 5), je pro $t \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$:

A) (–5*t*; *t*; 2*t*)
B) (–5*t*; –*t*; 2*t*)
C) (5*t*; *t*; 2*t*)
D) (–2*t*; *t*; 5*t*)

Úloha 3

Kružnice má střed v bodě *S* [3; –4] a prochází počátkem soustavy souřadnic. Jaké je její analytické vyjádření?

Řešení: $x^2+y^2-6x+8y=0$

Úloha 4

Řídící přímka paraboly má rovnici *x* = 2. Ohniskem paraboly je bod *F*[–4; 2]. Jaká je vrcholová rovnice dané paraboly?

Řešení: $(y-2)^2=-12(x+1)$

9. Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika

Úloha 1

Řešte rovnici: $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=x^2$

Řešení: rovnice nemá

Úloha 2

Do finále turnaje v žákovské kopané, v němž se utká každé družstvo s každým, se probojovala 4 družstva. Každé utkání bude trvat dvakrát 45 minut a mezi každým poločasem a každým zápasem je desetiminutová přestávka. Jaká je minimální cena, kterou organizátor zaplatí za pronájem hřiště, jestliže za každou započatou hodinu zaplatí 200 Kč?

Řešení: 2 200 Kč

Úloha 3

Soubor karet je očíslován přirozenými čísly od 1 do 24. Karty zamícháme a jednu z nich náhodně vytáhneme. Určete pravděpodobnost, že číslo karty je dělitelné číslem 4 nebo číslem 6.

Řešení: $\frac{1}{3}$

Úloha 4

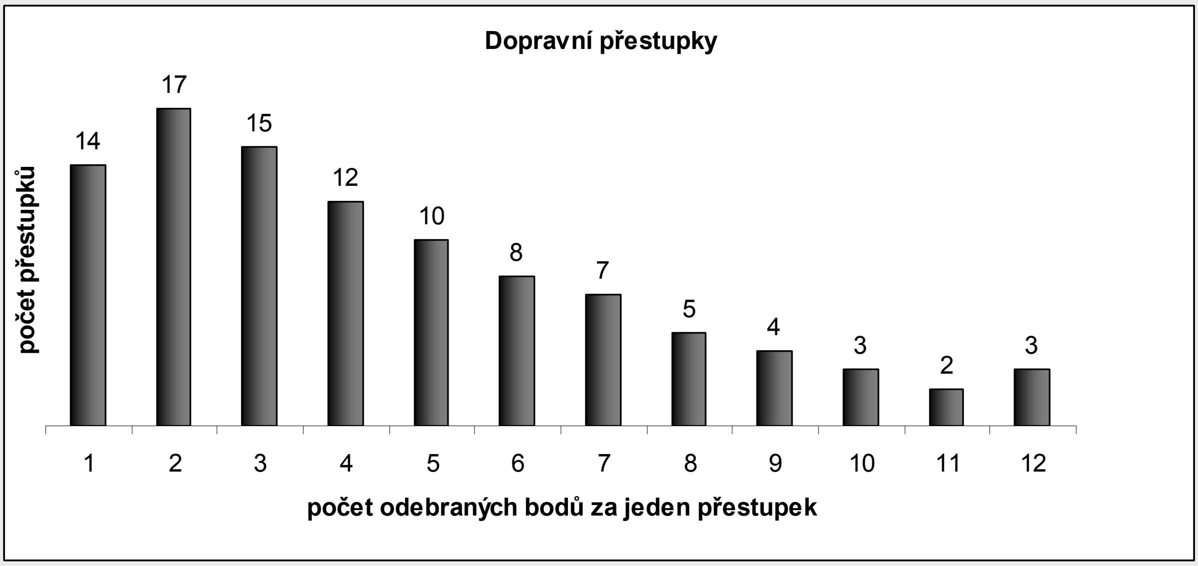
Ve škole jsou 4 třídy druhého ročníku označené písmeny A, B, C, D. V tabulce jsou uvedeny počty žáků a průměrné známky z matematiky v těchto třídách.

Třída	**Počet žáků**	**Průměrná známka z matematiky**
A	28	2,51
B	24	2,12
C	32	2,63
D	30	2,41

Vypočtěte průměrnou známku z matematiky žáka ve druhém ročníku této školy.

Řešení: 2,44

Úloha 5
V grafu je statistika dopravních přestupků ve sledovaném období.
(Například deseti řidičům bylo v tomto období odebráno po 5 bodech za jeden přestupek.)



5.1 Určete průměrný počet bodů odebraných za jeden přestupek.
5.2 Kolikrát počet odebraných bodů překročil průměrnou hodnotu?
5.3 Určete modus.
5.4 Určete medián.
5.5 Vypočtěte směrodatnou odchylku

Řešení: 5.1 4,52 bodu; 5.2 ve 42 případech; 5.3 2 body; 5.4 4 body; 5.5 2,94 bodu;